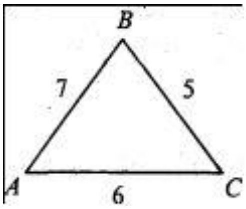
Сборник задач по теме «Треугольник»

Задача №1

Стороны треугольника 5 м, 6 м, 7 м. Найдите косинусы углов треугольника.

Решение задачи:



пусть ab = 7м; вс = 5м; ас = 6м. тогда по теореме косинусов
ав^2 = вс^2 + ас^2 - 2bc•ас•cos∠c,
то есть:

$$\cos\angle C = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2BC \cdot AC} = \frac{25 + 36 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5},$$

аналогично:

$$\cos\angle A = \frac{BA^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{49 + 36 - 25}{2 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{60}{84} = \frac{5}{7},$$

$$\cos\angle B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{49 + 25 - 36}{2 \cdot 7 \cdot 5} = \frac{38}{70} = \frac{19}{35}.$$

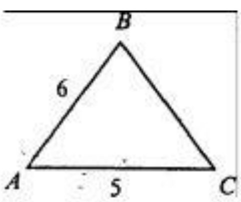
ответ:

$$\cos\angle C = \frac{1}{5}, \cos\angle A = \frac{5}{7}, \cos\angle B = \frac{19}{35}.$$

Задача №2

У треугольника две стороны равны 5 ми 6 м, а синус угла между ними равен 0,6. Найдите третью сторону.

Решение задачи:



Пусть AB = 6 м, AC = 5 м; sin∠A = 0,6. Имеем:

$$\cos^2\angle A = 1 - \sin^2\angle A,$$

$$\cos\angle A = \pm\sqrt{1-\sin^2 A} = \pm\sqrt{1-0{,}36} = \pm\sqrt{0{,}64} = \pm 0{,}8.$$

далее по теореме косинусов:

$bc^2 = ab^2 + ac^2 - 2ab \bullet ac \bullet \cos\angle a$

получаем, что

а) $BC^2 = 36 + 25 - 2\cdot5\cdot6\cdot0{,}8 = 61 - 48 = 13$ м^2 и $BC = \sqrt{13}$ м;

б) $BC^2 = 36 + 25 - 2\cdot5\cdot6(-0{,}8) = 61 + 48 = 109$ м^2 и $BC = \sqrt{109}$ м.

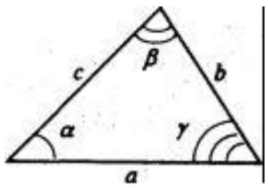
0твет:

а) $\sqrt{13}$ м; б) $\sqrt{109}$ м.

Задача №3

Стороны треугольника равны a, b, c. Докажите, что если a2 + b2 > c2 , то угол, противолежащий стороне с, острый. Если a2 + b2 < c2, то угол, противолежащий стороне с, тупой.

Решение задачи:



γ — угол треугольника, противолежащий стороне c. По теореме косинусов имеем:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

откуда получаем:

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

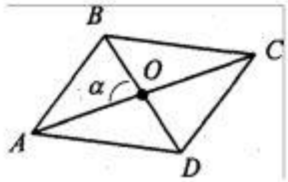
Если $a^2 + b^2 > c^2$, то $a^2 + b^2 - c^2 > 0$; тогда $\cos\gamma > 0$, а так как $0 < \gamma < 180°$, то γ — острый.

Если $a^2 + b^2 < c^2$, то $\cos\gamma < 0$ и угол γ — тупой. Что и требовалось доказать.

Задача №4

Даны диагонали параллелограмма c и d и угол между ними a. Найдите стороны параллелограмма.

Решение задачи:



Пусть ABCD — параллелограмм, AC=c, BD=d, $\angle$AOB=α.

Тогда $OC = AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}c$, $BO = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}d$ (по свойству диагоналей параллелограмма), $\angle AOB = \alpha$, так что по теореме косинусов имеем:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cdot \cos\angle AOB = \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}d^2 - \frac{1}{2}cd \cdot \cos\alpha$$

$$AB = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}d^2 - \frac{1}{2}cd \cdot \cos\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos\alpha}.$$

В ΔBOC по теореме косинусов имеем:

$$BC^2 = BO^2 + OC^2 - 2BO \cdot OC \cdot \cos(180° - \alpha) =$$
$$= \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}d^2 - \frac{1}{2}cd \cdot \cos(180° - \alpha) = \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}d^2 + \frac{1}{2}cd \cdot \cos\alpha$$

Т.к. $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, поэтому

$$BC = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}d^2 + \frac{1}{2}cd \cdot \cos\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{d^2 + c^2 + 2cd \cdot \cos\alpha}.$$

Далее AB = CD и AD = BC.

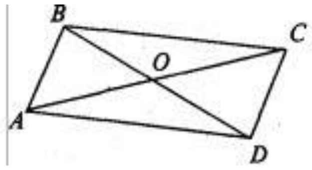
ответ:

$$\frac{1}{2}\sqrt{c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos\alpha}\ ;\ \frac{1}{2}\sqrt{d^2 + c^2 + 2cd \cdot \cos\alpha}$$

Задача №5

Даны стороны параллелограмма a и b и один из углов a. Найдите диагонали параллелограмма. Пусть ABCD — параллелограмм, AB = a, AD = b, ∠A = a.

Решение задачи:



в треугольнике bad, по теореме косинусов:

$$BD=\sqrt{AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos\alpha}=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}.$$

в треугольнике авс, по теореме косинусов:

$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\beta}=$$
$$=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos(180^\circ-\alpha)}=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}.$$

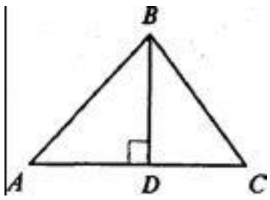
ответ:

$$BD=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha};\ AC=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}.$$

Задача №6

Стороны треугольника 4 м, 5 м и 6 м. Найдите проекции сторон 4 ми 5 м на прямую, содержащую сторону 6 м.

Решение задачи:



bd⊥ac; ab = 5м, bc = 4 м, ac = 6 м; ad — проекция ab на ac, dc — проекция bc на ac. по теореме косинусов:

$$\cos\angle A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{25+36-16}{2\cdot5\cdot6}=\frac{45}{60}=\frac{3}{4};$$

$$\cos\angle C=\frac{BC^2+AC^2-AB^2}{2BC\cdot AC}=\frac{16+36-25}{2\cdot4\cdot6}=\frac{27}{48}=\frac{9}{16}.$$

далее в прямоугольном треугольнике abd имеем:

$$AD=AB\cos\angle A=5\cdot\frac{3}{4}=\frac{15}{4}=3{,}75\ \text{м}.$$

А в ΔBCD:

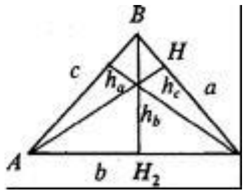
$$DC=BC\cos\angle C=4\cdot\frac{9}{16}=\frac{9}{4}=2{,}25\ \text{м}.$$

Ответ: AD = 3,75 м; DC = 2,25 м.

Задача №7

Найдите высоты треугольника, стороны которого равны 5 м, 6 м, 7 м.

Решение задачи:



найдем ha, hb, hc.

$$\cos\angle A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2ab} = \frac{36+49-25}{2\cdot 6\cdot 7} = \frac{60}{84} = \frac{5}{7};$$

$$\cos\angle B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{25+49-36}{2\cdot 5\cdot 7} = \frac{38}{70} = \frac{19}{35}$$

$$\cos\angle C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{25+36-49}{2\cdot 5\cdot 6} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}.$$

из основного тригонометрического тождества получаем:

$$\sin\angle A = \sqrt{1-\cos^2\angle A} = \sqrt{1-\frac{25}{49}} = \sqrt{1-\frac{25}{49}} = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7};$$

$$\sin\angle B = \sqrt{1-\cos^2\angle B} = \sqrt{1-\frac{361}{1225}} = \sqrt{\frac{864}{1225}} = \frac{12\sqrt{6}}{35};$$

$$\sin\angle C = \sqrt{1-\cos^2\angle C} = \sqrt{1-\frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

далее находим:

из ΔABH_1 $h_a = c\cdot\sin\angle B = 7\cdot\frac{12\sqrt{6}}{35} = \frac{12\sqrt{6}}{5}$ м;

из ΔBCH_2 $h_b = a\cdot\sin\angle C = 5\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5} = 2\sqrt{6}$ м;

из ΔACH_3 $h_c = b\cdot\sin\angle A = 6\cdot\frac{2\sqrt{6}}{7} = \frac{12\sqrt{6}}{7}$ м.

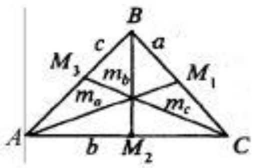
0твет:

$h_a = \frac{12\sqrt{6}}{5}$ м, $h_b = 2\sqrt{6}$ м, $h_c = \frac{12\sqrt{6}}{7}$ м.

Задача №8

Найдите медианы треугольника, стороны которого равны 5 м, 6 м, 7 м.

Решение задачи:



Найдем медианы m_a, m_b и m_c.

В ΔABM_1 AB=c=7 м, $BM_1=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}a=\frac{5}{2}$ м, $\cos\angle B=\frac{19}{35}$ (см. задачу № 1 §12). По теореме косинусов:

$$m_a = AM_1 = \sqrt{c^2+(\frac{1}{2}a)^2-2\cdot c\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos\angle B} =$$
$$=\sqrt{49+\frac{25}{4}-2\cdot7\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{19}{35}}=\sqrt{\frac{145}{4}}=\frac{\sqrt{145}}{2}$$

В ΔBCM_2 BC = a = 5 м, $BM_2=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}b=3$ м, $\cos\angle C=\frac{1}{5}$.

Из теоремы косинусов:

$$m_b = BM_2 = \sqrt{a^2+\left(\frac{1}{2}b\right)^2-2a\left(\frac{1}{2}b\right)\cdot\cos\angle C} =$$
$$=\sqrt{25+9-2\cdot5\cdot3\cdot\frac{1}{5}}=\sqrt{34-6}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}.$$

В ΔAM_3C AC=b=6 м, $AM_2=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}c=\frac{7}{2}$ м, $\cos\angle A=\frac{5}{7}$.

Так что

$$m_c = CM_3 = \sqrt{b^2+\left(\frac{1}{2}c\right)^2-2b\left(\frac{1}{2}c\right)\cdot\cos\angle A} =$$
$$=\sqrt{36+\frac{49}{4}-2\cdot6\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{7}}=\sqrt{\frac{73}{4}}=\frac{\sqrt{73}}{2}$$

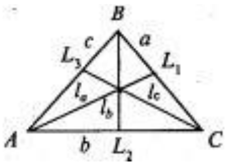
ответ:

$m_a = \frac{\sqrt{145}}{2}$; $m_b = 2\sqrt{7}$; $m_c = \frac{\sqrt{73}}{2}$

Задача №9

Найдите биссектрисы треугольника, стороны которого равны 5 м, 6 м, 7 м.

Решение задачи:



пусть $al_1 = l_a$, $bl_2 = l_b$, $cl_3 = l_c$ — биссектрисы. по свойству биссектрисы треугольника:

$$\frac{AB}{BL_1} = \frac{AC}{CL_1}.$$

известно, что ав = 7 м, ас = 6 м. пусть $вl_1 = x$ м, следовательно $l_1c = 5 - x$, откуда:

$$\frac{7}{x} = \frac{6}{5-x};\ 35 - 7x = 6x;\ -13x = -35;\ x = \frac{35}{13},$$

значит, $BL_1 = \frac{35}{13}$

В ΔABL_1 AB = 7 м, $BL_1 = \frac{35}{13}$, $\cos\angle B = \frac{19}{35}$ (см. задачу № 1).

по теореме косинусов получаем:

$$AL_1 = \sqrt{AB^2 + BL_1^2 - 2AB \cdot BL_1 \cdot \cos\angle B};$$

$$AL_1 = \sqrt{49 + \frac{1225}{169} - 2 \cdot 7 \cdot \frac{35}{13} \cdot \frac{19}{35}} = \sqrt{49 + \frac{1225}{169} - \frac{3458}{169}} =$$

$$= \sqrt{49 - \frac{2233}{169}} = \sqrt{\frac{6048}{169}} = \frac{12\sqrt{42}}{13}.$$

аналогично:

$\frac{AB}{AL_2} = \frac{BC}{L_2C}$, т.е. $\frac{7}{y} = \frac{5}{6-y}$, где $AL_2 = y$ м,

$42 - 7y = 5y; -12y = -42;\ y = \frac{7}{2};$

следовательно

$AL_2 = \frac{7}{2}$ м.

В ΔABL_2, $AB = 7$ м, $AL_2 = \frac{7}{2}$ м, $\cos\angle A = \frac{5}{7}$, тогда

$$BL_2 = \sqrt{AB^2 + AL_2^2 - 2AB \cdot AL \cdot \cos\angle A} = \sqrt{49 + \frac{49}{4} - 2 \cdot 7 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{7}} =$$
$$= \sqrt{\frac{105}{4}} = \frac{\sqrt{105}}{2}.$$

Далее $\frac{BC}{BL_3} = \frac{AC}{AL_3}$, т.е. $\frac{5}{z} = \frac{6}{7-z}$, где $BL_3 = z$ м.

$$35 - 5z = 6z; -11z = -35;\ z = \frac{35}{11};$$

т.е. $BL_3 = \frac{35}{11}$.

В ΔCBL_3

$$CL_3 = \sqrt{BC^2 + BL_3^2 - 2BC \cdot BL_3 \cos\angle B} =$$
$$= \sqrt{25 + \frac{1225}{121} - \frac{2090}{121}} = \sqrt{\frac{2160}{121}} = \frac{12\sqrt{15}}{11}.$$

0твет:

$AL_1 = \frac{12\sqrt{42}}{13}$; $BL_2 = \frac{\sqrt{105}}{2}$; $CL_3 = \frac{12\sqrt{15}}{11}$.

№ 11*. Как изменяется сторона AB треугольника ABC, если угол C возрастает, а длины сторон AC и BC остаются без изменений?

<u>Решение задачи:</u>

имеем:

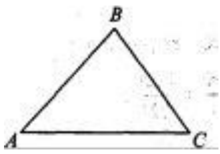
$ab^2 = ac^2 + cb^2 - 2ac \bullet cb \bullet \cos\angle c$.

если ас и аb не изменяются, а 'с возрастает, то cos∠с — убывает, следовательно ab^2возрастает. значит, аb возрастает.

Задача №10

У треугольника ABC AB = 15 см, AC = 10 см. Может ли sin b = 3/4

Решение задачи:



По теореме синусов: $\frac{AB}{\sin\angle C}=\frac{AC}{\sin\angle B}$, откуда имеем:

$$\sin\beta=\frac{AC\cdot\sin\angle C}{AB}=\frac{10}{15}\cdot\sin\angle C=\frac{2}{3}\cdot\sin\angle C,$$

то есть $\sin\angle C=\frac{3}{2}\sin\beta$.

Если $\sin\beta=\frac{3}{4}$, то $\sin\angle C=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{8}$, но $-1<\sin\angle C<1$, а $\frac{9}{8}>1$, так что $\sin\beta$ не может быть равен $\frac{3}{4}$.

ответ. не может.

Задача №11

Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 5 м, 6 м, 7 м.

Решение задачи:

По теореме синусов: $R=\frac{a}{2\sin\alpha}=\frac{b}{2\sin\beta}=\frac{c}{2\sin\gamma}$. Далее, пусть $b=6$ м. Тогда $\sin\beta=\frac{12\pi}{35}$ (смотри задачу № 8). Так что

$$R=\frac{b}{2\sin\angle B}=\frac{6}{2\cdot\frac{12\sqrt{6}}{35}}=\frac{6\cdot35}{2\cdot2\sqrt{6}}=\frac{35}{4\sqrt{6}}.$$

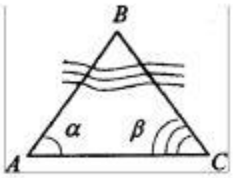
0твет:

$\frac{35}{4\sqrt{6}}$.

Задача №12

Объясните, как найти расстояние от точки A до недоступной точки B, зная расстояние AC и углы a и b.

Решение задачи:



По теореме синусов: $\frac{AB}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sin\angle B}$, тогда: $AB = \frac{AC \cdot \sin\beta}{\sin\angle B}$,

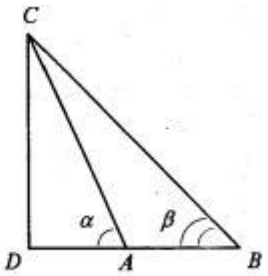
т.к. $\angle B = 180° - (\alpha + \beta)$, то $\sin B = \sin(180° - (\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta)$

и $AB = \frac{AC \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

Задача №13

Объясните, как найти высоту x здания по углам a и b и расстоянию a.

Решение задачи:



В ΔABC $\angle A = 180° - \alpha$, тогда $\angle C = 180° - \beta - (180° - \alpha) = \alpha - \beta$.

Далее по теореме синусов: $\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\angle C}$, так что $AC = \frac{AB \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$.

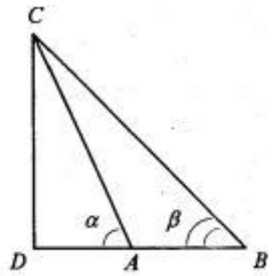
ΔACD — прямоугольный, поэтому:

$$x = CD = AC\sin\alpha = \frac{AB\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Задача №14

Объясните, как найти высоту x здания по углам a и b и расстоянию a.

Решение задачи:



В ΔABC $\angle A = 180° - \alpha$, тогда $\angle C = 180° - \beta - (180° - \alpha) = \alpha - \beta$.

Далее по теореме синусов: $\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\angle C}$, так что $AC = \frac{AB \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$.

ΔACD — прямоугольный, поэтому:

$$x = CD = AC\sin\alpha = \frac{AB\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Задача №15

В треугольнике ABC $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 80°$.

Решение задачи:

какая из сторон треугольника наибольшая, какая — наименьшая?

По теореме синусов $\frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{BC}{\sin\angle A} = \frac{AC}{\sin\angle B}$. Из условия следует что $\sin\angle C > \sin\angle B > \sin\angle A$, тогда $AB > AC > BC$, т.е. сторона AB — наибольшая, а сторона BC — наименьшая.

Задача №16

У треугольника ABC стороны AB = 5,1 м, BC = 6,2 м, AC = 7,3 м. Какой из углов треугольника наибольший, какой — наименьший?

Решение задачи:

По теореме синусов $\frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{BC}{\sin\angle A} = \frac{AC}{\sin\angle B}$. Так как по условию AC > BC > AB, то и $\sin\angle B > \sin\angle A > \sin\angle C$, значит и $\angle B > \angle A > \angle C$. Поэтому $\angle B$ — наибольший, а $\angle C$ — наименьший.

Задача №17

Что больше — основание или боковая сторона равнобедренного треугольника, если прилежащий к основанию угол больше 60°?

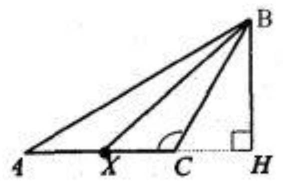
Решение задачи:

Так как прилежащий к основанию угол больше 60°, то угол при вершине меньше 60°. По теореме синусов против меньшего угла лежит меньшая сторона, так что боковая сторона больше.

Задача №18

У треугольника ABC угол Ступой. Докажите, что если точка X лежит на стороне AC, то BX < AB.

Решение задачи:

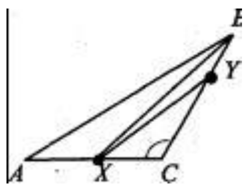


проведем вн ⊥ ас. так как х лежит на ас, то ан > хн, а значит, наклонная ав > вх (т.к. из двух наклонных больше та, проекция которой больше). что и требовалось доказать.

Задача №19

У треугольника ABC угол C тупой. Докажите, что если точка X лежит на стороне AC, а точка Y — на стороне BC, то XY < AB.

Решение задачи:

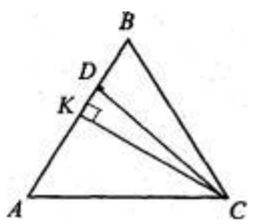


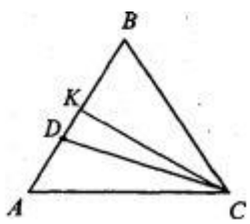
соединим x с b, по доказанному в предыдущей задаче xb < ab и xy < xb. так что xy < ab, что и требовалось доказать.

Задача №20

На стороне AB треугольника ABC отмечена точка D. Докажите, что отрезок CD меньше по крайней мере одной из сторон: AC или BC.

Решение задачи:





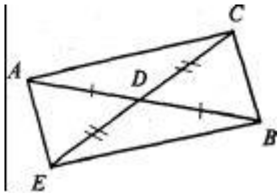
проведем ck ⊥ ab. точка d лежит или между b и к или между a и k.
если d лежит между точками к и b, то kb > kd; а если проекция больше, то больше и наклонная, т.е. ab > cd.
аналогично доказывается, что cd < ac, если точка d лежит между точками a и к.
если d совпадает с к, то cd < cb, так как наклонная больше перпендикуляра.
что и требовалось доказать.

Задача №21

Дан треугольник ABC, CD — медиана, проведенная к стороне AB. Докажите, что если AC > BC, то угол ACD меньше угла BCD.

Решение задачи:

продолжим медиану cd и отложим на ней отрезок de = cd; полученный четырехугольник acbe — параллелограмм. be = ac и cb = ae.



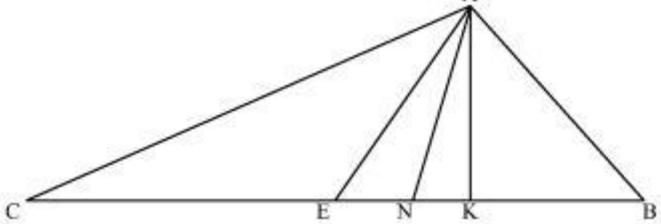
в ▲ace ∠acd лежит против стороны ae = cb. В ▲cbe ∠bcd лежит против стороны be = ac. так как ac > bc, то ∠acd < ∠bcd. что и требовалось доказать.

Задача №22

Докажите, что биссектриса треугольника не меньше высоты и не больше медианы, проведенных из этой же вершины.

Решение задачи:

пусть в ▲abc, ak — высота, an — биссектриса ∠a, ae — медиана.



из точки a к прямой bc проведены перпендикуляр ak (высота) и две наклонные. следовательно точка n принадлежит либо kb, либо ke.
точка n совпадает с k, тогда an = ak < ae.
точка n совпадает с e, тогда an = ae > ak.
точка n лежит между точками k и e, тогда ak < an < ae (так как ее проекция nk меньше ek — проекции ae).

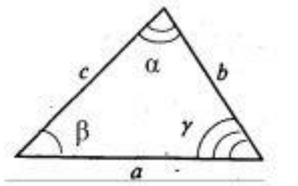
по доказанному , an не может быть больше ae, т.е. точка n не может лежать между e и c что и требовалось доказать.

Задача №23

Даны сторона и два угла треугольника. Найдите третий угол и остальные две стороны, если:

Решение задачи:

1) $a = 5,\ \beta = 30°,\ \gamma = 45°$
2) $a = 20,\ \alpha = 75°,\ \beta = 60^0$;
3) $a = 35,\ \beta = 40°,\ \gamma = 120°$;
4) $b = 12,\ \alpha = 36°,\ \beta = 25°$;
5) $c = 14,\ \alpha = 64°,\ \beta = 48°$.



1) $\alpha = 180° - \beta - \gamma = 180° - 30° - 45° = 105°$

используя теорему синусов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

получаем:

$$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{5\sin 30^{\circ}}{\sin 105^{\circ}} \approx 2{,}59,$$

$$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{5\sin 45^{\circ}}{\sin 105^{\circ}} \approx 3{,}66.$$

2) $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 75° - 60° = 45°.$

используя теорему синусов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

получаем:

$$b=\frac{a\cdot\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{20\cdot\sin 60^{\circ}}{\sin 75^{\circ}}=\frac{20\cdot 0{,}87}{0{,}97}\approx 17{,}9,$$

$$c=\frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}=\frac{20\cdot\sin 45^{\circ}}{\sin 75^{\circ}}=\frac{20\cdot 0{,}7}{0{,}97}\approx 14{,}4.$$

3) $\alpha = 180^{\circ}-\beta-\gamma = 180^{\circ}-120^{\circ}-40^{\circ}=20^{\circ}$.

используя теорему синусов:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma},$$

получаем:

$$b=\frac{a\cdot\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{35\cdot\sin 40^{\circ}}{\sin 20^{\circ}}=\frac{35\cdot 0{,}64}{0{,}34}\approx 65{,}8,$$

$$c=\frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}=\frac{35\cdot\sin 120^{\circ}}{\sin 20^{\circ}}=\frac{35\cdot 0{,}87}{0{,}34}\approx 89{,}6.$$

4) $\gamma = 180^{\circ}-\alpha-\beta = 180^{\circ}-36^{\circ}-25^{\circ}=119^{\circ}$.

используя теорему синусов:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma},$$

получаем

$$c=\frac{b\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}\beta=\frac{12\cdot\sin 119^{\circ}}{\sin 25^{\circ}}\approx\frac{12\cdot 0{,}88}{0{,}42}=24{,}8,$$

$$a=\frac{b\cdot\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{12\cdot 0{,}88}{0{,}42}\approx 16{,}7.$$

5) $\gamma = 180^{\circ}-\alpha-\beta = 180^{\circ}-64^{\circ}-48^{\circ}=68^{\circ}$.

используя теорему синусов:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma},$$

получаем:

$$a=\frac{c\cdot\sin\alpha}{\sin\gamma}=\frac{14\cdot\sin 64^{\circ}}{\sin 68^{\circ}}=\frac{14\cdot 0{,}9}{0{,}93}\approx 13{,}6,$$

$$b=\frac{c\cdot\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{14\cdot 0{,}74}{0{,}93}\approx 11{,}2.$$

<u>Задача №24</u>

Даны две стороны и угол между ними. Найдите остальные два угла и третью сторону, если:

<u>Решение задачи:</u>

1) $a = 12, b = 8, \gamma = 60°$;
2) $a = 7, b = 23, \gamma = 130°$;
3) $b = 9, c = 17, \alpha = 95°$;
4) $b = 14, c = 10, \alpha = 145°$;
5) $a = 32, c = 23, \beta = 152°$;
6) $a = 24, c = 18, \beta = 15°$.

1) Используя теорему косинусов, находим:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = \sqrt{144 + 64 - 2 \cdot 96 \cdot 0{,}5} = \sqrt{112} \approx 10{,}6.$$

Далее $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{(10{,}6)^2 + 64 - 144}{2 \cdot 8 \cdot 10{,}6} \approx 0{,}19$, так что

$\alpha = 79°$, а $\beta = 180° - 79° - 60° = 41°$.

2) используя теорему косинусов, находим:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = \sqrt{49 + 529 + 2 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 0{,}64} = \sqrt{784{,}08} \approx 28.$$

Далее $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{529 + 784 - 49}{2 \cdot 23 \cdot 28} \approx 0{,}98$, так что

$\alpha = 11°$, а $\beta = 180° - 11° - 130° = 39°$.

3) используя теорему косинусов, находим:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha} = \sqrt{81 + 289 - 306\cos 95^{\circ}} = \sqrt{396{,}7} \approx 19{,}9$$

Далее $\cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{396{,}01 + 289 - 81}{2 \cdot 19{,}9 \cdot 17} = \dfrac{604{,}01}{676{,}6} = 0{,}8$

так что $\beta = 27°$, а $\gamma = 180° - 95° - 27° = 58°$.

4) используя теорему косинусов, находим:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha} = \sqrt{196 + 100 + 227{,}6} = \sqrt{523{,}6} \approx 22{,}9.$$

Далее: $\cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{100 + 523{,}6 - 196}{2 \cdot 22{,}9 \cdot 10} \approx 0{,}93$, так что

$\beta = 21°$, а $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 145° - 21° = 14°$.

5) используя теорему косинусов, находим:

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta} = \sqrt{1024 + 529 + 1472 \cdot 0{,}88} =$$
$$= \sqrt{2848{,}36} \approx 53{,}4.$$

Далее: $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{2848{,}36 + 529 - 1024}{2 \cdot 53{,}4 \cdot 23} \approx 0{,}9580$,

так что $\alpha = 16°$, а $\gamma = 180° - 152° - 16° = 12°$.

6) используя теорему косинусов, находим:

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta} = \sqrt{576 + 324 + 864 \cdot \cos 15^{\circ}} \approx \sqrt{61,9} \approx 7,9 .$$

далее;

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{324 + 61,9 - 576}{2 \cdot 7,9 \cdot 18} \approx -0,67 ,$$

так что

а = 130°, а у = 180° - 15° - 130° = 35°.

<u>Задача №25</u>

В треугольнике заданы две стороны и угол, противолежащий одной из сторон. Найдите остальные углы к сторону треугольника, если:

<u>Решение задачи:</u>

1) $a = 12$, $b = 5$, $\alpha = 120°$;
2) $a = 27$, $b = 9$, $\alpha = 138°$;
3) $a = 34$, $b = 12$, $\alpha = 164°$;
4) $a = 2$, $b = 4$, $\alpha = 60°$;
5) $a = 6$, $b = 8$, $\alpha = 30°$.

1) по теореме синусов имеем:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

откуда

получаем:

$$\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} = \frac{5 \cdot \sin 120^{\circ}}{12} = \frac{5 \cdot 0,87}{12} \approx 0,3608 ,$$

т.е. $\beta = 21°$, $\gamma = 180° - 120° - 21° = 39°$ и

$$c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{12 \cdot \sin 39^{\circ}}{\sin 120^{\circ}} = \frac{12 \cdot 0,63}{0,87} \approx 8,69 .$$

2) по теореме синусов имеем:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

откуда

получаем:

$$\sin\beta = \frac{b\cdot\sin\alpha}{a} = \frac{9\cdot\sin 138^{\circ}}{27} = \frac{9\cdot 0{,}67}{27} \approx 0{,}223,$$

т.е. $\beta \approx 13^{\circ}$, $\gamma = 180^{\circ} - 138^{\circ} - 13^{\circ} = 29^{\circ}$ и

$$c = \frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{27\cdot\sin 29^{\circ}}{\sin 138^{\circ}} = \frac{27\cdot 0{,}48}{0{,}67} \approx 19{,}6.$$

3) по теореме синусов имеем:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

откуда
получаем:

$$\sin\beta = \frac{b\cdot\sin\alpha}{a} = \frac{12\cdot\sin 164^{\circ}}{34} = \frac{12\cdot 0{,}28}{34} \approx 0{,}0973,$$

т.е. $\beta = 6^{\circ}$, $\gamma = 180^{\circ} - 164^{\circ} - 6^{\circ} = 10^{\circ}$ и

$$c = \frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{34\cdot 0{,}18}{0{,}28} \approx 22{,}3.$$

4) по теореме синусов имеем:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

откуда
получаем:

$$\sin\beta = \frac{b\cdot\sin\alpha}{a} = \frac{4\cdot 0{,}87}{2} = 1{,}73,$$

но sin b должен быть меньше 1, значит, задача не имеет решения.

5) по теореме синусов имеем:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

откуда
получаем:

$$\sin\beta = \frac{b\cdot\sin\alpha}{a} = \frac{8\cdot 0{,}5}{6} \approx 0{,}667,$$

т.е. $\beta_1 = 42^{\circ}$ или $\beta_2 = 138^{\circ}$. Тогда $\gamma = 180^{\circ} - \alpha - \beta$, т.е. $\gamma_1 = 108^{\circ}$

или $\gamma_2 = 12^{\circ}$. Далее $c = \dfrac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}$, так что $c_1 \approx 11{,}4$ или $c_2 \approx 2{,}49$.

Задача №26

Даны три стороны треугольника. Найдите его углы, если:

Решение задачи:

1) $a = 2, b = 3, c = 4$;
2) $a = 7, b = 2, c = 8$;
3) $a = 4, b = 5, c = 7$;
4) $a = 15, b = 24, c = 18$;

5) $a = 23$, b = 17, c = 39;
6) $a = 55$, b = 21, c = 38. 1) по теореме косинусов имеем:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{9+16-4}{24} = 0{,}875\ ,\ \alpha \approx 29^\circ,$$

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{4+16-9}{16} = 0{,}6875\ ,\ \beta \approx 47^\circ.$$

тогда y = 180º - 29º - 47° = 104°. 2) по теореме косинусов имеем:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{4+64-49}{2\cdot2\cdot8} = \frac{19}{32} = 0{,}5938\ ,\ \alpha=54^\circ,$$

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{49+64-4}{2\cdot7\cdot8} = \frac{109}{112} = 0{,}9732\ ,\ \beta=13^\circ.$$

тогда y = 180º - 54º - 13° = 113º. 3) по теореме косинусов имеем:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{25+49-16}{2\cdot5\cdot7} = \frac{58}{70} \approx 0{,}8286\ ,\ \alpha = 34^\circ,$$

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{16+49-25}{2\cdot4\cdot7} = \frac{40}{56} \approx 0{,}7143\ ,\ \beta = 44^\circ.$$

тогда y = 180º - 34º - 44º = 102º. 4) по теореме косинусов имеем:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{576+324-225}{2\cdot24\cdot18} \approx 0{,}7813,\ \alpha = 39^\circ,$$

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{324+225-578}{2\cdot15\cdot18} = -\frac{27}{540} = -0{,}05\ ,\ \beta = 93^\circ.$$

тогда y = 180° - 39° - 93° = 180° - 132° = 48°.
5) по теореме косинусов имеем:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{289+1521-289}{2\cdot17\cdot39} \approx 0{,}966,\ \alpha=15°,$$

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{529+1521-289}{2\cdot23\cdot39} \approx 0{,}9816,\ \beta = 11°.$$

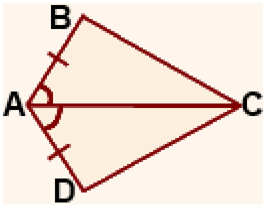
тогда y = 180° -15° -11° = 154°. 6) по теореме косинусов имеем:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-c^2}{2ac} = \frac{441+1444-3025}{2\cdot21\cdot38} \approx -0{,}7142,\ \alpha = 136°$$

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{3025+1444-441}{2\cdot55\cdot38} \approx 0{,}9636,\ \beta = 15°.$$

тогда y = 180° - 136° - 15° = 29°.

Задача №27

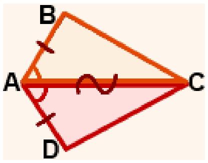
1) 

Дано:

AB=AD,

∠BAC=∠DAC

Доказать: ΔABC=ΔADC

Доказательство: 

Этот ход сразу позволяет увидеть, что данные треугольники имеют общую сторону AC.

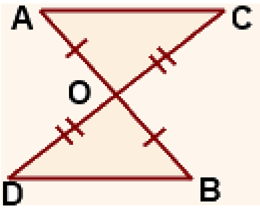
1) AB=AD (по условию)

2) ∠BAC=∠DAC (по условию)

3) AC — общая сторона.

Следовательно, ΔABC=ΔADC (по двум сторонам и углу между ними, то есть по первому признаку равенства треугольников).
Что и требовалось доказать.

Задача №28



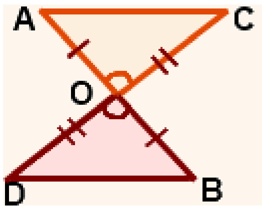
Дано:

AO=BO,

CO=DO

Доказать: ΔAOC=ΔBOD.

Доказательство:



AO=BO (по условию)

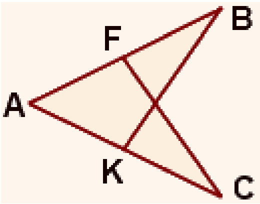
CO=DO (по условию).

∠AOC = ∠BOD (как вертикальные).

Все три пункта первого признака равенства треугольников есть.
Следовательно, ΔAOC=ΔBOD (по двум сторонам и углу между ними).

Что и требовалось доказать.

Задача №29



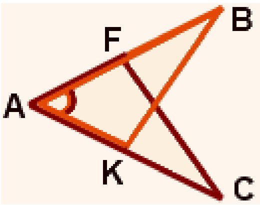
Дано:

AB=AC,

AF=AK

Доказать: ΔABK=ΔACF

Доказательство:



AB=AC (по условию)

AF=AK (по условию)

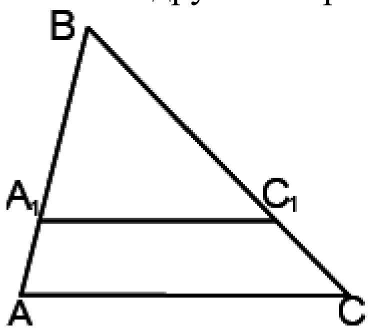
∠A — общий.

Следовательно, ΔABK=ΔACF (по двум сторонам и углу между ними).

Что и следовало доказать.

Задача №30

В треугольнике проведен отрезок, параллельный стороне. Концы отрезка лежат на других сторонах треугольника.



Рассмотрим треугольники ABC и A1BC1.

∠B — общий;
∠ BAC=∠BA1C1 (как соответственные углы при AC∥ A1C1 и секущей AB).
Следовательно, треугольники ABC и A1BC1 подобны (по двум углам).
Из подобия треугольников следует пропорциональность соответствующих сторон:

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B} = \frac{BC}{BC_1}.$$

Задача №31

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает сторону AB в точке A1, а сторону BC — в точке B1. Найти длину отрезка A1C1, если AC=35, AA1: A1B=2:5.
Решение:

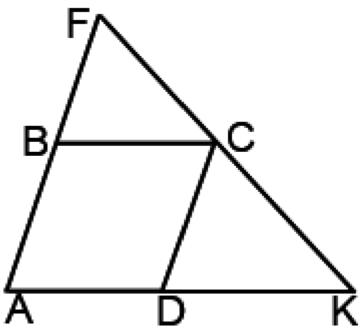
Доказываем подобие треугольников ABC и A1BC1.

$$AB = AA_1 + A_1B, \frac{AA_1}{A_1B} = \frac{2}{5}, \Rightarrow \frac{AB}{A_1B} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{AB}{A_1B} = \frac{AC}{A_1C_1}, \frac{7}{5} = \frac{35}{A_1C_1}, \Rightarrow A_1C_1 = \frac{35 \cdot 5}{7} = 25$$

Ответ: 25.

Задача №32



Рассмотрим треугольники AFK и BFC.

$\angle$F — общий;
$\angle$ FAK=$\angle$FBC (как соответственные углы при AD$\parallel$ BC и секущей AB).
Следовательно, треугольники AFK и BFC подобны (по двум углам).

Из подобия треугольников следует пропорциональность соответствующих сторон:

$$\frac{AK}{BC} = \frac{AF}{BF} = \frac{FK}{FC}.$$

Задача №33

В треугольник AFK вписан ромб ABCD так, что угол A у них общий, в вершина C принадлежит стороне FK. Найти сторону ромба, если AF=21 см, AK=24 см.
Решение.

Доказываем подобие треугольников AFK и BFC. Из трех соотношений выбираем те, в которых нам что-либо известно:

$$\frac{AK}{BC} = \frac{AF}{BF}, \Rightarrow \frac{24}{BC} = \frac{21}{BF}.$$

Примем сторону ромба за x:

$AB = AD = BC = x\text{cm}$

Тогда BF=AF-AB=21-x см. Отсюда

$\frac{24}{x} = \frac{21}{21-x}, \Rightarrow 21x = 24(21-x)$

Разделив обе части уравнения на 3, получаем:

$7x = 8(21-x)$

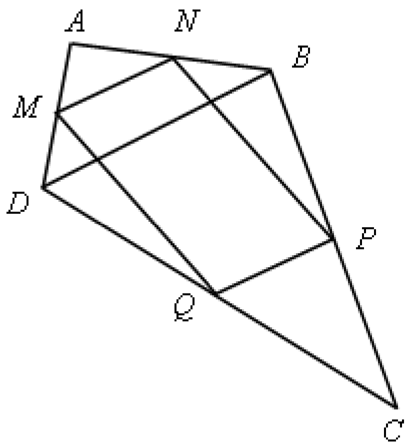
$7x + 8x = 168$

$15x = 168$

$x = 11,2$

Ответ: 11,2 см.

Задача №34



Решение

MN – средняя линия ABD.

MN || DB и MN = DB.

PQ – средняя линия CBD.

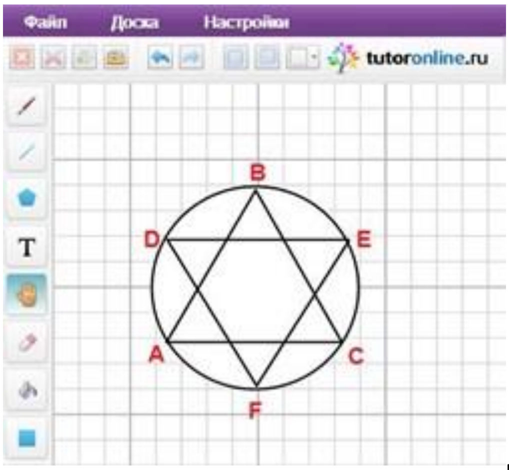
PQ || DB и PQ = DB.

Имеем MN || DB и PQ || DB, поэтому MN || PQ.

Получили MN || PQ и MN = PQ = DB, следовательно, четырехугольник MNPQ – параллелограмм.

Задача №35

Треугольники ABC и DEF вписаны в одну и ту же окружность. Доказать, что равенство их периметров равносильно условию sin A + sin B + sin C = sin D + sin E + sin F.



Доказательство.

Рассмотрим треугольник ABC. Согласно теореме синусов

AB/sin C = BC/sin A = AC/sin B = 2R или sin C/AB = sin A/BC = sin B/AC = 1/(2R).

sin C = AB/(2R); sin A = BC/(2R); sin B = AC/(2R).

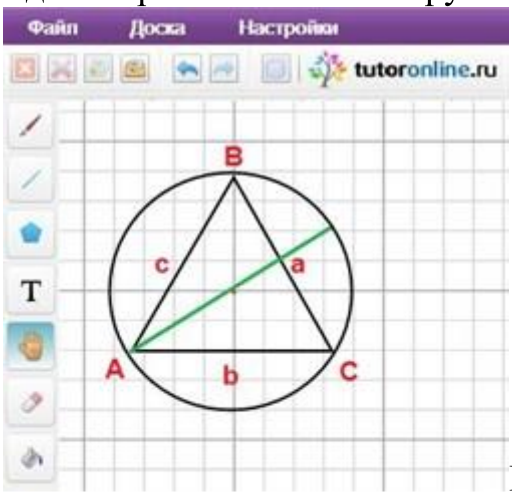
sin A + sin B + sin C = (BC + AC + AB) / (2R) = P_1/(2R).
sin A + sin B + sin C = P_1/(2R), где P_1 – периметр треугольника ABC.

Аналогично, из треугольника DFE имеем:

sin D + sin E + sin F = (EF + DF + DE) / (2R) = P_2/(2R), где P_2 – периметр треугольника DFE .
Легко видеть, что если $P_1 = P_2$, то sin A + sin B + sin C = sin D + sin E + sin F и наоборот.

Задача №36

Найти все тройки чисел a, b, c Є N, являющихся длинами сторон треугольника с диаметром описанной окружности, равным 6,25.



Решение.

Так как диаметр – это наибольшая хорда окружности, а стороны треугольника – хорды, то a, b, c $\le$ 6,25. Учитывая условие, что a, b и c – натуральне числа, очевидно, что сторонами могут быть числа равные 1, 2, 3, 4, 5 или 6.

R = abc/(4S) или 2d = abc/S, имеем 12,5 = abc/S.

Возведем в квадрат последнее равенство и используем формулу Герона для площади треугольника, получим:

156,25p(p – a)(p – b)(p – c) = $(abc)^2$, где p – полупериметр треугольника ABC.
16$(abc)^2$ = 156,25(a + b + c)(-a + b + c)(a – b + c)(a + b – c);
64$(abc)^2$ = 625(a + b + c)(-a + b + c)(a – b + c)(a + b – c).
Так как числа 64 и 625 взаимно простые, то выражение $(abc)^2$ делится на 625, а выражение abc делится на 25. Учитывая, что a, b, c = (1, 2, 3, 4, 5, 6), видим, что два числа равны 5, пусть a = b = 5.

Чтобы найти c, используем равенство

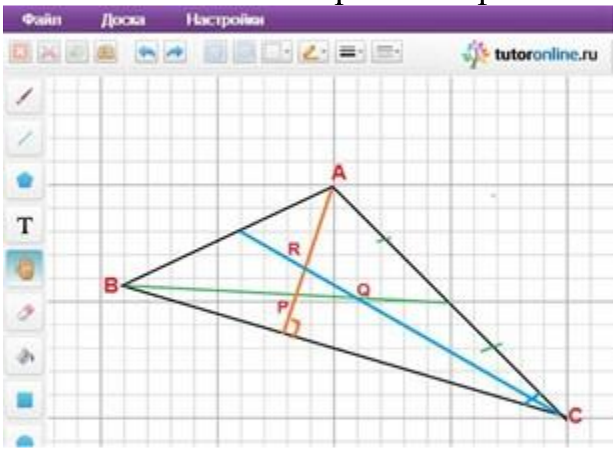
64$(abc)^2$ = 625(a + b + c)(-a + b + c)(a – b + c)(a + b – c), имеем:
$64 \cdot 625c^2 = 625(10 + c) \cdot c^2(10 - c)$, так как $c \neq 0$, то $64 = 100 - c^2$,

а значит c = 6.

Ответ: 5, 5, 6.

Задача №37

В остроугольном неравностороннем треугольнике через одну вершину проведена высота, через другую – медиана, а через третью – биссектриса. Доказать, что если проведенные линии, пересекаясь, образуют треугольник, то он не может быть равносторонним.



Доказательство.

Проведем его методом от противного.

Согласно условию, имеем остроугольный неравносторонний треугольник ABC. Предположим, что треугольник RQP равносторонний (R – точка пересечения высоты AH и биссектрисы CL треугольника ABC, Q – точка пересечения CL и медианы BM, P – точка пересечения AH и BM).

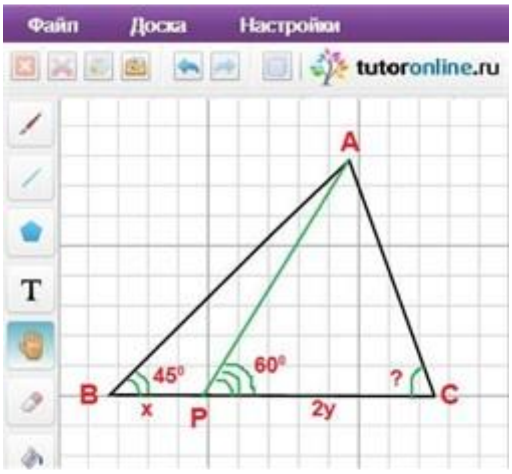
Тогда углы R, Q и P треугольника RQP равны по 60°. Рассмотрим треугольник RHC: угол R равен 60°, угол H равен 90°, треугольник прямоугольный, так как AH – высота, поэтому угол RCH равен 30°.

Так как CL – биссектриса, то <RCH = <RCA = 30° и <ACH = 60°. У прямоугольного треугольника AHC угол CAH равен 30°.

Рассмотрим треугольник APM: угол P = 60°, угол A = 30°, поэтому угол AMP = 90°. Таким образом, получаем, что BM – является не только медианой, но и высотой, а значит, треугольник ABC – равнобедренный. Исходя из того, что у треугольника ABC угол C равен 60°, то он и равносторонний, что противоречит условию задачи, ведь треугольник ABC неравносторонний. Получили противоречие, поэтому предположение, что треугольник RQP равносторонний **не верно.**

Задача №38

На стороне BC треугольника ABC взята точка P, для которой PC = 2BP. Найти угол <ACB, если угол <ABC = 45°, угол <APC = 60°.



Решение.

Пусть BP = x (x > 0), тогда PC = 2x.

<APC = 60° по условию, поэтому <APB = 180° – 60° = 120°.

Рассмотрим треугольник APB: по теореме о сумме углов треугольника

<BAP = 180° – 120° – 45° = 15°.

По теореме синусов:

x/sin 15° = AB/sin 120° = 2AP/√2, значит AP = x/(√2sin 15°).

По формуле косинуса двойного аргумента получаем:

cos 30° = 1 – 2sin^2 15°, откуда sin 15° = √((1 – cos 30°)/2) = √(2 – √3)/2, тогда

AP = x · √(2/(2 – √3)). Избавимся от иррациональности в знаменателе дроби:

AP = x · √(4 + 2√3) = x · √(1 + √3)2 = x · |1 + √3| = x · (1 + √3).

Рассмотрим треугольник APC.

По теореме косинусов AC^2 = x^2 · (4 + 2√3) + 4x^2 – 2x^2 · (1 + √3) = 6x^2, т.е. AC = √6 · x.

Воспользуемся теоремой синусов: AC/sin 60° = PC/sin CAP;

2√6 · x/√3 = 2x/sin CAP;

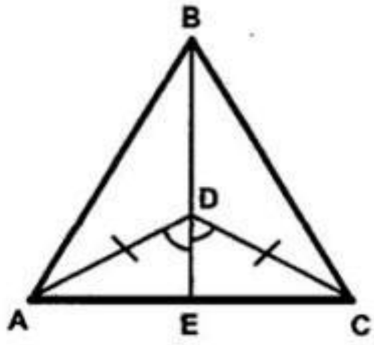
√2 = 1/sin CAP;

sin CAP = √2/2, <CAP = 45°. Тогда <ACP = 180° – 45° – 60° = 75°.

Ответ : угол ACB = 75° .

Задача №39

Докажите, что треугольник ABC равнобедренный



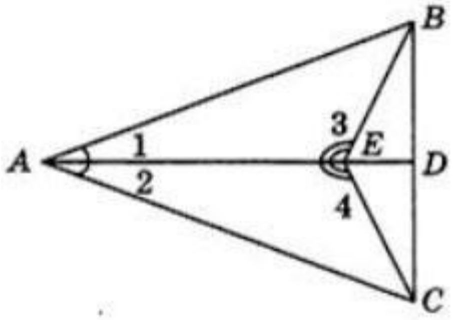
Решение: Из равенства треугольников ADE и CDE (по двум сторонам и углу между ними) имеем, что AE=EC, углы при вершине E равны и так как они смежные, то каждый равен 90^0. Значит, BE является медианой и высотой, проведенной к основанию AC треугольника ABC, а значит треугольник ABC равнобедренный с основанием AC.

По разные стороны от прямой AC отмечены точки B и D так, что получились пары равных углов: BAC и DAC, BCA и DCA. AB=5 см, BC=8см. Найдите длину CD.

Решение: Доказать равенство получившихся треугольников по стороне и двум прилежащим углам, из равенства следует равенство всех соответствующих элементов и значит BC=CD=8 см.

Задача №40

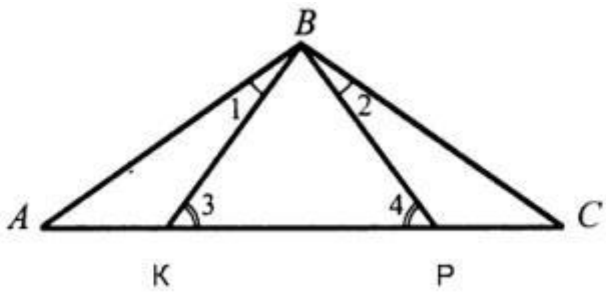
$\angle 1 = \angle 2, \ \angle 3 = \angle 4$. Доказать, что BD=CD



Решение: Треугольники ABE и CAE равны по стороне и двум прилежащим углам. Из равенства треугольников следует, что EB=EC. Значит треугольник CEB – равнобедренный. Углы BED и CED равны как смежные равным углам AEB и AEC. Значит ED – биссектриса угла E равнобедренного треугольника ABC, а значит и медиана. Т.е. BD=CD.

ΔABC AB=CB, $\angle 1 = \angle 2$.

Задача №41



Докажи, что $\angle 3 = \angle 4$.

Решение: Треугольники ABK и CBP равны по двум сторонам и углу между ними (AB=CB – по условию, угол 1 равен углу 2 - по условию, угол A равен углу B - как углы при основании равнобедренного треугольника ABC).

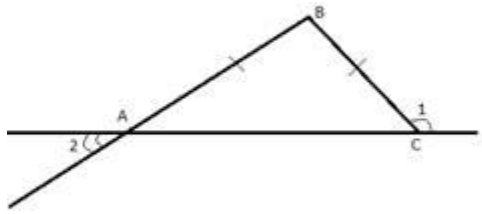
Из равенства треугольников следует, что углы AKB и CPB равны.

Значит $\angle 3 = \angle 4$, как смежные равным углам AKB и CPB

Задача №42

На рисунке AB = BC, $\angle 1 = 150^o$. Найдите $\angle 2$.

Решение: Выполним пояснительный рисунок:



1. $\angle ACB = 180^o - 150^o = 30^o$ (по свойству смежных углов). Значит, угол при основании равнобедренного треугольника равен 30^o.

2. $\angle BAC = \angle ACB = 30^o$ (поскольку углы при основании равнобедренного треугольника равны).

3. $\angle 2 = \angle BAC$ (как вертикальные), значит, $\angle 2 = \angle BAC = 30^o$.

Ответ: 30^o.

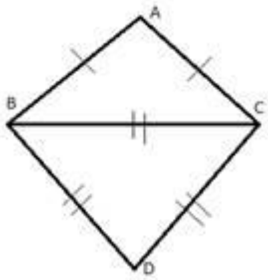
Задача №43

Периметр равнобедренного треугольника ABC с основанием BC равен 40 см, а периметр равностороннего треугольника BCD равен 45 см. Найдите стороны AB и BC.

Дано: AB = AC, BC = CD = DB. $P_{ABC} = 40$ см. $P_{BCD} = 45$ см.

Найти: AB и BC.

Решение: Выполним пояснительный рисунок:



Решение: Пусть BC = x, тогда все стороны равностороннего треугольника тоже равны x. Пусть AB = y, тогда обе боковые стороны треугольника равны y. Следуя условию, 3x = 45. Найдем x. x = 45 : 3 = 15. Используем факт, что P_{ABC} = 40 см. 15 + 2y = 40, 2y = 25, y = 25 : 2 = 12,5.

Ответ: AB = 12,5 см, BC = 15 см.

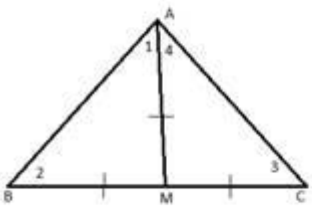
Задача №44

Медиана AM в треугольнике ABC равна отрезку BM. Докажите, что ∠BAC = ∠B + ∠C.

Дано: BM = MC, AM = BM.

Доказать: ∠BAC = ∠B + ∠C.

Доказательство: Выполним пояснительный рисунок:



Треугольник AMB – равнобедренный, углы при основании равны, значит, ∠1 = ∠2. треугольник AMC – равнобедренный, значит, углы при основании равны, ∠4 = ∠3.

∠1 + ∠4 = ∠2 + ∠3

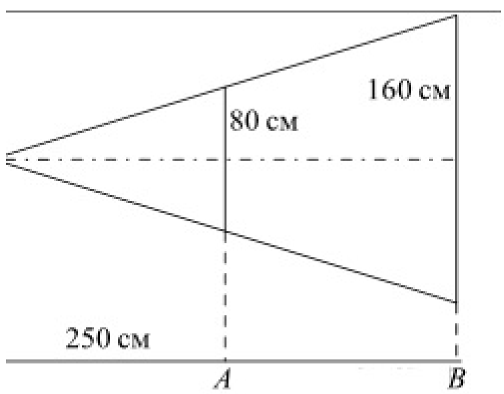
∠BAC = ∠B + ∠C

Ответ: Доказано.

Задача №44

Проектор полностью освещает экран *A* высотой 80 см, расположенный на расстоянии 250 см от проектора. На каком наименьшем расстоянии (в сантиметрах) от проектора нужно расположить экран *B* высотой 160 см, чтобы он был полностью освещён, если настройки проектора остаются неизменными?

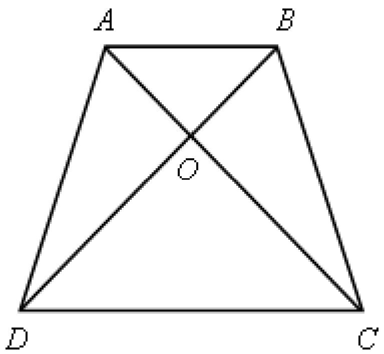
Решение.



Заметим, что высота экрана, расположенного на расстоянии 250 см, в 2 раза меньше высоты экрана, расположенного на искомом расстоянии, значит, по теореме о средней линии, искомое расстояние в два раза больше первоначального экрана: 250·2 = 500.

Ответ: 500.

Задача №45



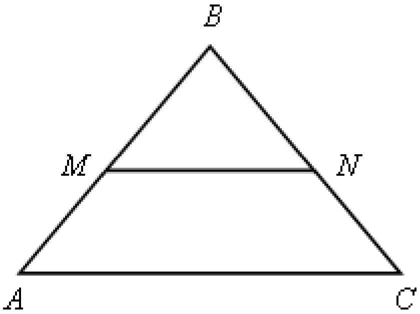
AO : *OC* = *BO* : *OD*. Докажите, что *ABCD* – трапеция или параллелограмм.

Решение

По второму признаку подобия треугольников ■*ABO* ∾ ■*COD*, поэтому ■*BAO* = ■*OCD*, тогда *AB* || *DC*.

ABCD – трапеция.

Задача №46



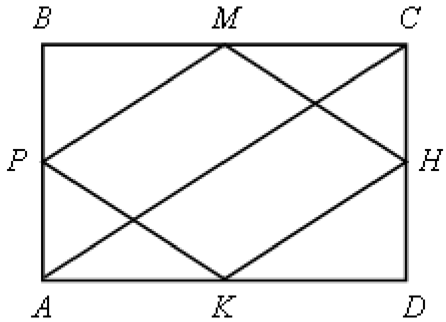
M и *N* – середины сторон *AB* и *BC*. Докажите, что *MN* || *AC*.

Решение

По второму признаку подобия треугольников [redacted] *ABC* ∾ [redacted]*MBN*, поэтому [redacted]*BMN* = [redacted]*ABC*, тогда *MN* || *AC*.

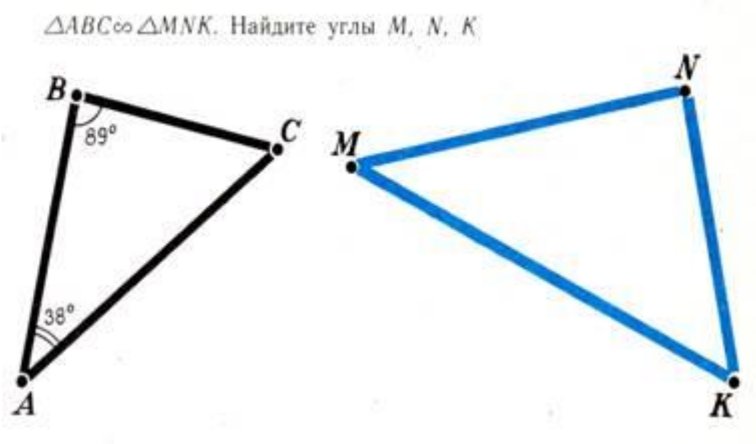
Задача №47.

Доказать, что фигура *PMHK* ромб.



1) *PM* || *AC* и *PM* = *AC*.
2) *KH* || *AC* и *KH* = *AC*.
3) *PM* || *KH* и *PM* = *KH*, поэтому *PMHK* – параллелограмм.
4) *PBM* = *HCM* = *HDK* =
= *PAK* по двум катетам.
5) *PMHK* – ромб.

Задача №48.



Решение:

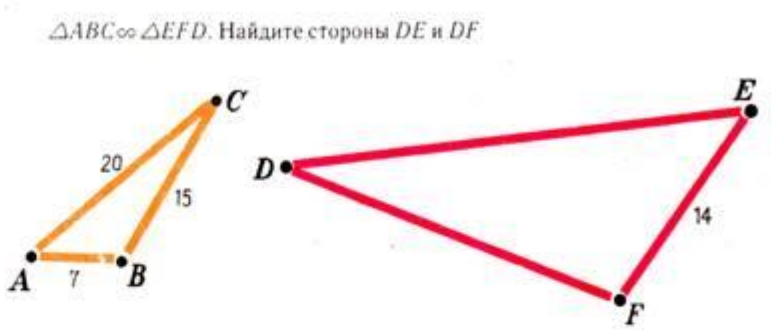
Треугольники подобны по условию задачи, следовательно, по определению подобных треугольников углы одного треугольника равны углам другого.

Сумма углов в треугольнике равна 180^0, следовательно $\angle C = 180^0 - (\angle A + \angle B)$, а именно $\angle C = 180^0 - (89^0 + 38^0) = 53^0$.

Из пунктов (1) и (2) $\Longrightarrow$ $\angle M = 38^0, \angle N = 89^0, \angle K = 53^0$.

Ответ: $\angle M = 38^0, \angle N = 89^0, \angle K = 53^0$.

Задача №49



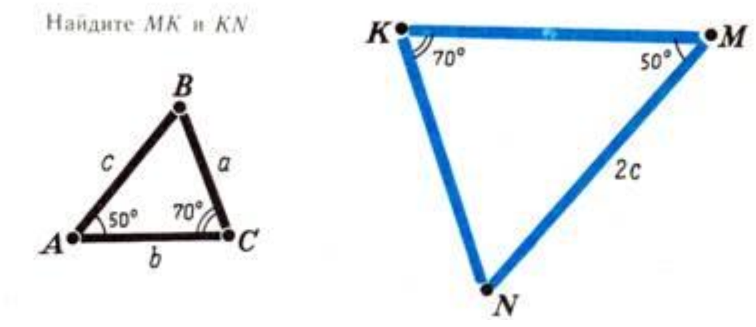
Решение:

1. Треугольники подобны по условию задачи, следовательно, по определению подобных треугольников стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.
2. Составим отношение: $\frac{AC}{DE} = \frac{BC}{DF} = \frac{AB}{FE}$.

3. Для того, чтобы найти DE, ∢ пропорцию $\frac{AC}{DE} = \frac{AB}{FE}$: $\Longrightarrow DE = \frac{AC \cdot FE}{AB} \Longrightarrow DE = 40.$ Аналогичное действие выполните со стороной DF.

Ответ: $DE = 40; DF = 30.$

<u>Задача №50</u>



Решение:

∢ ΔABC и ΔKNM: $\angle A = \angle K$ и $\angle C = \angle M$ по условию, $\Longrightarrow$
$\Delta ABC \infty \Delta KNM$ по первому признаку (по двум углам)

Т.к. $\Delta ABC \infty \Delta KNM$, то составим отношение схлдственных сторон $\frac{b}{MK} = \frac{c}{2c}, \Rightarrow MK = 2b.$

Аналогичное действие выполните для стороны KN.

Ответ: $MK = 2b;\ KN = 2a.$

<u>**Задача №51**</u>

Решение.

$\sphericalangle$ ΔADN и ΔDFC: $\angle AND = \angle DFC$ (по условию)и $\angle DAN = \angle DCF$ по свойствам параллелограма, $\Longrightarrow$ $\Delta ADN \propto \Delta DFC$ по первому признаку (по двум углам)

Составим отношение сходственных сторон: $\frac{AD}{DC} = \frac{DN}{DF} \Rightarrow DF = \frac{DC \cdot DN}{AD} \Rightarrow DF = 28.$

Ответ: $DF = 28.$